

## **Regulatory PID**

W układach regulacji, czyli układach sterowania z pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, urządzenie sterujące nazywane jest **regulatorem**.

Za pierwszy regulator przemysłowy uważa się regulator kulowy, odśrodkowy („*centrifugal governor*”, „*flyball regulator*”) o działaniu P, w który James Watt wyposażył w roku 1774 maszynę parową. Patent uzyskał w 1788 roku chociaż regulatory tego typu stosowane były w młynach wiatrowych do regulacji nacisku kamieni młyńskich już od XVII wieku. Teoria regulacji rozwijała się z opóźnieniem w stosunku do praktyki. Za twórcę teorii regulacji uważany jest James C. Maxwell, który opublikował w *The Proceedings of the Royal Society* ( nr 100 z roku 1868) artykuł „*On Governors*”. Zaproponował w nim wykorzystanie modelowania matematycznego do opisu między innymi regulatora Watta. Linearyzując układ regulacji, opracował kryteria stabilności dla układów z obiektem inercyjnym do trzeciego rzędu włącznie (pierwiastki równania charakterystycznego układu muszą posiadać ujemne części rzeczywiste). Praca Maxwella nie przyciągnęła uwagi, gdyż koncentrowała się na minimalizacji uchybu regulacji (wykorzystując tzw. astatyczny regulator Watta). Nie dotyczyła aktualnej wówczas tematyki regulacji w maszynach parowych, tzn. wpływu nieliniowości ( tarcie tachometru). Problemem tym zajął się w 1877 roku I.A. Vyschnegradsky w pracy „*O regulatorach bezpośredniego działania*”. W tym samym roku Edward Rouht opracował na prośbę Maxwella kryteria stabilności (jeżeli jeden ze współczynników wielomianu charakterystycznego układu jest ujemny lub zerowy to układ jest niestabilny) oraz praktyczną tablicę, która pozwalała określić maksymalne wzmocnienie regulatora, przy którym układ jest na granicy stabilności (w publikacji „*A treatise on the stability of given state of motion*”). Zasługi Maxwella dla teorii regulacji docenił w swoich pracach z 1948 roku Norbert Wiener.

Kilka ważniejszych dat w historii rozwoju regulatorów (wg informacji internetowej):

- 1922 – teoretyczne podstawy regulatora PID – N. Minorski „*Directional stability of automatically steered bodies*” (*J. Am. Soc. Naval Eng.*),
- 1933 – firma Taylor Instrument Co. wprowadza pierwszy pneumatyczny regulator P z nastawianym współczynnikiem wzmocnienia (Fulscope model 56R),
- 1934 – pneumatyczny regulator PI (model 40) - firma Foxboro,
- 1940 - pneumatyczny regulator PID – firma Taylor (Fulscope model 100),
- 1942 – duże środki na rozwój automatyki w ramach The Manhattan Project,
- 1942, 1943 – metody doboru nastaw regulatora PID – John G. Ziegler, Nathaniel B. Nichols z firmy Taylor,
- 1951 – lampowy regulator elektroniczny serii Autronic - firma Swartwout Co.,
- 1959 – regulator półprzewodnikowy – firma Bailey Meter Co.,
- 1964 – regulator cyfrowy - firma Taylor,
- 1975 – mikroprocesorowy regulator P-200 Micon – koncern Powell

Sygnał wyjściowy regulatora powstaje w wyniku określenia odchyłki regulacji, a następnie odpowiedniego przekształcenia dynamicznego. W regulatorach o wyjściu ciągłym wielkość wyjściowa jest ciągłą funkcją wielkości wejściowej.

Skrót PID pochodzi od działania proporcjonalno-całkowo-różniczkowego regulatora polegającego na tym, że przyrost wielkości wejściowej (odchyłki regulacji ) powoduje zmiany wielkości wyjściowej będące sumą: sygnału proporcjonalnego do odchyłki regulacji (*Proportional*), całki odchyłki regulacji (*Integral*) oraz pochodnej, czyli sygnału proporcjonalnego do szybkość zmian odchyłki (*Differential*). Wszystkie składowe odpowiedzi regulatora sumowane są ze współczynnikami wagowymi. Współczynniki te nazywa się nastawami regulatora.

Równanie regulatora o niezależnych nastawach (tzw. PID-INdependent, a także *ideal parallel, noninteracting*) ma postać:

$$U(t) + T \frac{dU(t)}{dt} = k_p e(t) + k_I \int e(t) dt + k_D \frac{de(t)}{dt} =$$

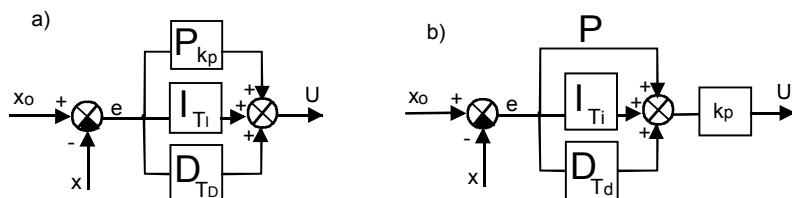
$$= k_p e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

gdzie:

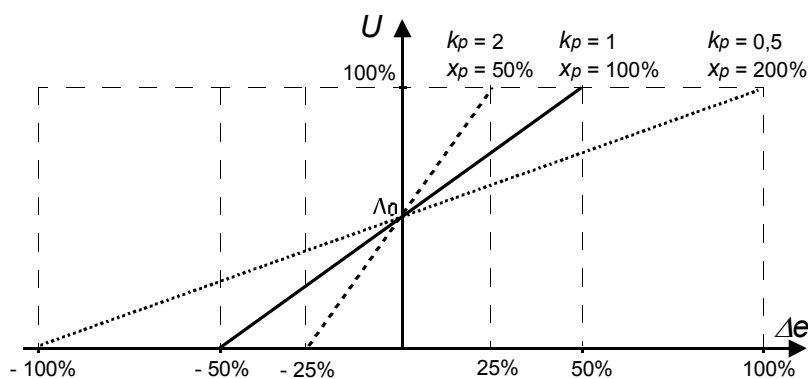
$e(t)$  - uchyb regulacji równy różnicy między wartością zadaną i wartością zmiennej procesowej,  $k_p, k_I, k_D$  - współczynniki: wzmocnienia proporcjonalnego, całkowego i różniczkowego,  $T_I$  - czas całkowania [sek],  $T_D$  - czas różniczkowania [sek],  $T$  - stała czasowa inercji regulatora. Dla  $T=0$  uzyskuje się idealny regulator PID. W technice mikroprocesorowej inercja wprowadzana bywa celowo, zaś w realizacjach analogowych regulatora była niemożliwa do uniknięcia. Transmitancja regulatora PID-IND:

$$R(s) = k_p + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T s} \quad (2)$$

realizowana jest przez strukturę równoległą (rys.1a)



Rys. 1. Struktury regulatorów: a) równoległa (PID-IND), b) szeregowo-równoległa PID-ISA ( $x_o$  – wartość zadana,  $x$  – wartość zmiennej procesowej,  $U$  – sygnał wyjściowy regulatora)



Rys.2. Charakterystyki statyczne członu proporcjonalnego o różnych nastawach.

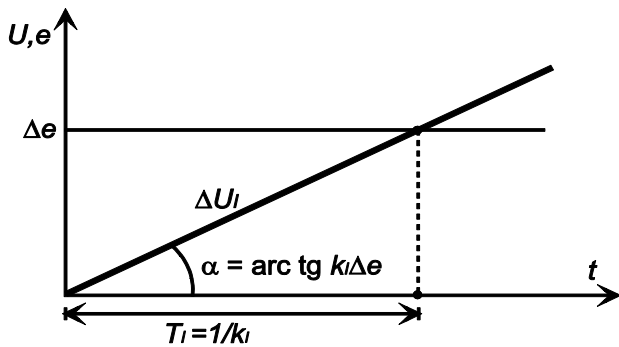
Składowa proporcjonalna P: sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do sygnału wejściowego  $\Delta e$ ,

$$\Delta U_p = k_p \Delta e = \frac{\Delta e}{x_p} * 100\% + \Delta o$$

$$x_p = \frac{1}{k_p} * 100\%$$

$k_p$  - współczynnik wzmocnienia proporcjonalnego (*proportional gain*)

$x_p$  - zakres proporcjonalności (*Proportional Band – PB*)[%], wskazuje jaki zakres zmian sygnału wejściowego powoduje zmianę sygnału wyjściowego w pełnym zakresie (100%).

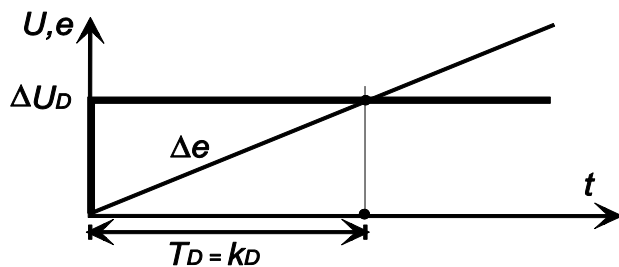


Rys.3. Odpowiedź członu całkującego na skokową zmianę uchybu regulacji

Składowa całkowa „I”: prędkość zmian sygnału wyjściowego jest proporcjonalna do sygnału wejściowego  $\Delta e$  (rys.3) ,

$$\frac{\Delta U_I}{\Delta t} = k_I \Delta e = \frac{\Delta e}{T_I}, \quad \Delta U_I = \frac{1}{T_I} \Delta e \Delta t$$

Czas  $T_I$ , po którym przyrost sygnału wyjściowego członu całkującego zrówna się z przyrostem sygnału wejściowego nazywa się stałą czasową całkowania lub czasem całkowania.



Rys.4. Odpowiedź członu różniczkującego na liniową zmianę uchybu regulacji

Składowa „D”: sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do szybkości zmian sygnału wejściowego (rys.4).

$$\Delta U_D = k_D \frac{\Delta e}{\Delta t} = T_D \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

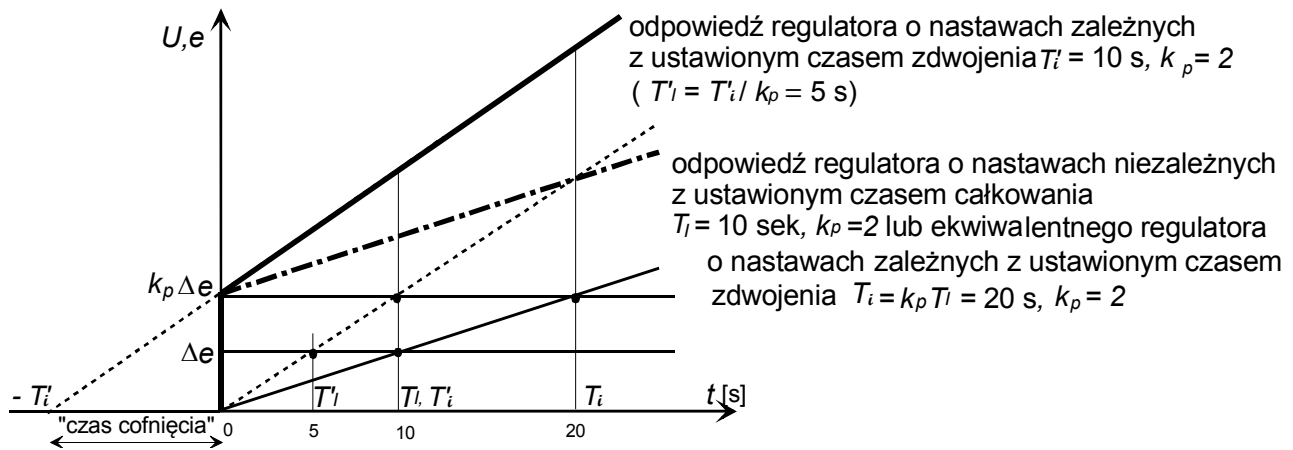
$T_D$  – czas, po którym przyrost sygnału wejściowego narastającego liniowo zrówna się z przyrostem sygnału członu różniczkującego nazywany jest stałą czasową różniczkowania lub czasem różniczkowania.

Wyłączając w równaniu (1) współczynnik wzmocnienia przed nawias otrzymuje się częściej wykorzystywane równanie regulatora o nastawach zależnych (tzw. PID-ISA, standardowy lub DEPENDENT, ale także szeregowo – równoległy a nawet *ideal, parallel, noninteracting*) w postaci:

$$\begin{aligned} U(t) &= k_p \left[ e(t) + \frac{1}{k_p T_I} \int e(t) dt + \frac{T_D}{k_p} \frac{de(t)}{dt} \right] = \\ &= k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$k_p$  - współczynnik wzmocnienia proporcjonalnego (w równaniu PID –ISA oznaczany niekiedy także  $k_c$ ),  $T_i = k_p T_I$  - czas zdwojenia [sek],  $T_d = \frac{T_D}{k_p}$  – czas wyprzedzenia [sek]. Skrót ISA pochodzi od *Ideal Standard Algorithm*. Na rys.5 przedstawiono odpowiedzi regulatorów PI na skokową zmianę sygnału wejściowego.



Rys.5. Odpowiedzi regulatorów PI na skokową zmianę sygnału wejściowego.

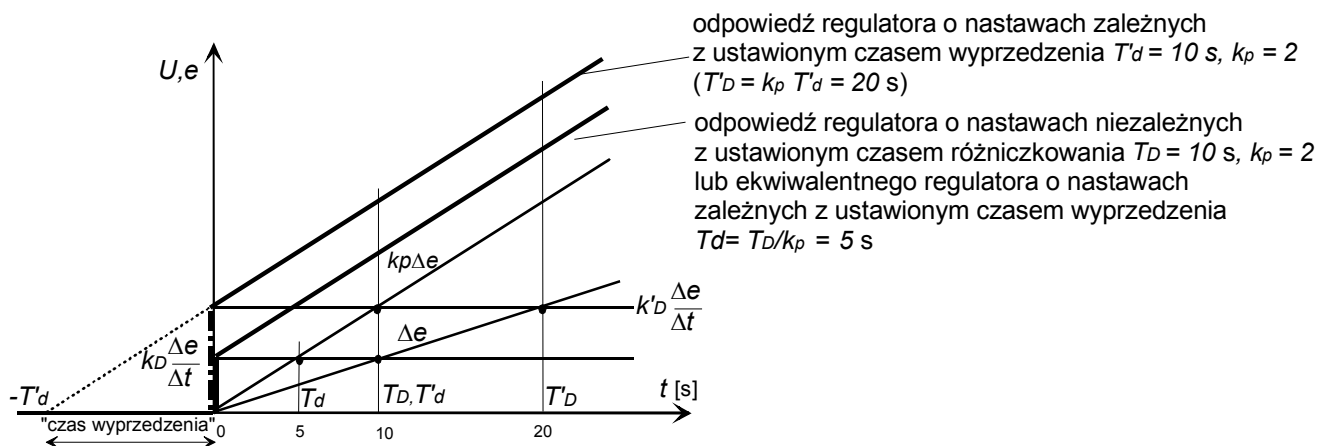
$$\Delta U_{PI} = k_p \Delta e + \frac{1}{T_I} \Delta e \Delta t \quad \text{PID - IND} \quad (4)$$

$$\Delta U_{PI} = k_p \left( \Delta e + \frac{1}{T_i} \Delta e \Delta t \right) \quad \text{PID - ISA} \quad (5)$$

$$T_i = k_p T_I \quad (6)$$

Pojęcie „czas zdwojenia” ma sens tylko w regulatorach z działaniem proporcjonalnym jako że chodzi tu o czas, po którym przyrost składowej całkowitej zrównuje się z przyrostem składowej proporcjonalnej  $k_p \Delta e$ . W momencie tym następuje podwojenie wartości sygnału wyjściowego regulatora PI. Spotyka się także inne określenia parametru „czas zdwojenia”. W literaturze anglosaskiej nazywany też jest „reset time”, „integral time” i podawany w [sek] ([sek/repeat]) lub odwrotność tego czasu  $k_i$  (reset rate)[sek]<sup>-1</sup>[repeat/sek]. W niektórych regulatorach za podstawową jednostkę czasu przyjmuje się minutę i należy wówczas przeliczyć odpowiednio nastawy przed wprowadzeniem ich wartości do urządzenia. Pojęcia reset i repeat mają tu ten sam sens co omówione powyżej „zdwojenie”. Czas zdwojenia w literaturze niemieckiej nazywany jest „czasem cofnięcia”-  $T_n$  (nachstellzeit), ponieważ pokazuje o jaki czas należałoby cofnąć przebieg odpowiedzi I, by począwszy od momentu wymuszenia skokowego była równa odpowiedzi PI. W literaturze technicznej nazywany też jest czasem izodromu (czyli „równej drogi”- w domyśle: składowej I i składowej P sygnału).

Na rys.6 przedstawiono odpowiedzi regulatorów PD na liniowo narastający sygnał wejściowy.



Rys.6. Odpowiedzi regulatorów PD na liniowo narastający sygnał wejściowy

$$\Delta U_{PD} = k_p \Delta e + T_D \frac{\Delta e}{\Delta t} \quad \text{PID - IND} \quad (7)$$

$$\Delta U_{PD} = k_p(\Delta e + T_d \frac{\Delta e}{\Delta t}) \quad \text{PID - ISA} \quad (8)$$

$$T_d = \frac{T_D}{k_p} \quad (9)$$

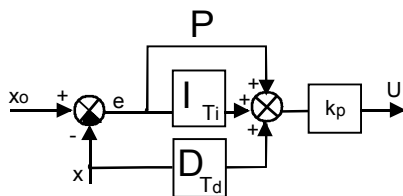
Pojęcie „czas wyprzedzenia” ma sens tylko w regulatorach z działaniem proporcjonalnym jako że chodzi tu o czas, po którym przyrost składowej proporcjonalnej  $k_p \Delta e$  zrównuje się z przyrostem składowej różniczkowej. Spotyka się także inne określenia parametru „czas wyprzedzenia”. W literaturze anglosaskiej nazywany też jest *derivative time*, *rate* lub *pre-act* i podawany w [sek] lub czasami w [min].

Czas wyprzedzenia w literaturze niemieckiej nazywany jest „*vorhaltzeit*” i oznaczany  $T_v$ , ponieważ pokazuje o jaki czas regulator PD jest szybszy od regulatora P.

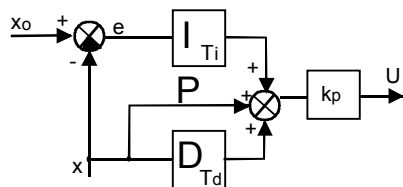
Regulatory mikroprocesorowe oferują często dodatkowe algorytmy nieklasyczne, np. progresywny – uwzględniający także drugą pochodną czasową zmian odchyłki regulacji.

Przyjmując określone wartości współczynników w równaniu regulatora PID można otrzymać także regulator proporcjonalny (P), proporcjonalno-całkujący (PI), całkujący (I) lub proporcjonalno-różniczkujący (PD).

Oprócz struktury standardowej, równoległej (ISA) stosowanej w większości regulatorów istnieją również jej odmiany.



$$U(s) = k_p [T_d s X(s) + (1 + \frac{1}{T_i s}) E(s)] \quad (10)$$



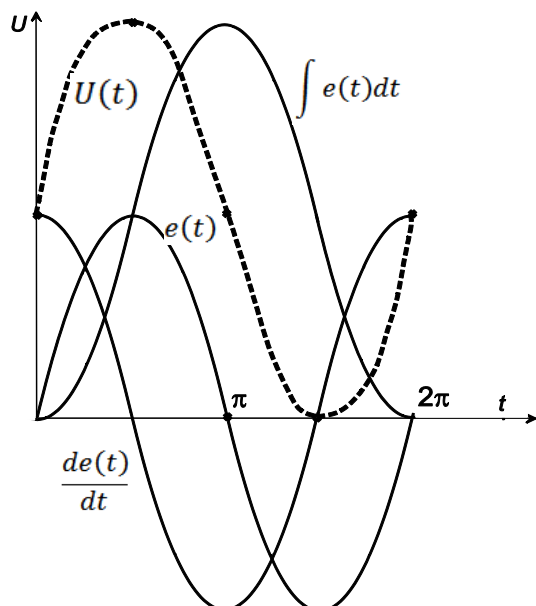
$$U(s) = k_p [(1 + T_d s) X(s) + \frac{1}{T_i s} E(s)] \quad (11)$$

Rys.7. Struktury szeregowo-równoległe regulatora PID

Wykorzystywane są, gdy często występują zmiany wartości zadanej i reagowanie regulatora na te zmiany jest niepożądane. Pod uwagę brane są wtedy tylko zmiany sygnału zmiennej procesowej.

Trzecią wykorzystywaną strukturą regulatora PID jest tzw. struktura szeregową, z interakcją (*interacting*), analogowa (*analog*) lub klasyczna (*classical*).

Wpływ każdej składowej algorytmu PID można przedstawić na prostym przykładzie, gdy uchyb regulacji zmienia się sinusoidalnie, a wszystkie nastawy regulatora są równe jeden (rys. 8)



Rys. 8. Wpływ składowych P,I i D na sygnał wyjściowy regulatora PID ( $k_p = T_i = T_d = 1$ )

Składowa proporcjonalna powtarza zmiany uchybu regulacji i zmienia znak w punkcie  $\pi$ , gdy uchyb równy jest zero. Wykorzystanie wyłącznie składowej proporcjonalnej (regulator P) nie doprowadza do osiągnięcia wartości zadanej w stanie ustalonym. Uchyb w stanie ustalonym można zmniejszyć zwiększając współczynnik wzmocnienia regulatora, ale może to doprowadzić do niestabilności układu regulacji.

Składowa całkowa przez cały okres zmian uchybu (niezależnie od jego znaku) ma wartość dodatnią. W punkcie przejścia uchybu przez zero (zmiana wartości z dodatniej na ujemną) osiąga wartość maksymalną, a następnie zmniejsza swoją wartość, choć uchyb zaczyna maleć znacznie wcześniej. Tym samym składowa całkowa wprowadza opóźnienie w reagowaniu sygnału wyjściowego regulatora na zmiany uchybu regulacji, co oznacza zwiększenie ryzyka niestabilności układu. Celem wprowadzenia składowej całkowej jest eliminacja uchybu regulacji w stanie ustalonym odpowiedzi na zakłócenie skokowe.

Składowa różniczkowa zmniejsza wartość sygnału wyjściowego regulatora z wyprzedzeniem w stosunku do momentu zmiany znaku uchybu i tym samym wprowadza działanie stabilizujące.

Mikroprocesorowa realizacja regulatorów wymaga dyskretnych algorytmów realizacji równania regulatora. Otrzymuje się je dyskretyzując czas z krokiem  $\Delta t$ , zastępując pochodne różnicami skończonymi, a całkę odpowiednim algorytmem wykorzystującym sumowanie.

Sygnał wyjściowy regulatora PID - ISA

$$U(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) , \quad (18)$$

może być obliczany na podstawie algorytmu pozycyjnego, gdy liczona jest każdorazowo wartość sygnału w każdej dyskretnej chwili czasowej, lub algorytmu przyrostowego, gdy liczone są jedynie zmiany w stosunku do poprzedniej chwili czasowej.

Algorytm pozycyjny:

- całkowanie metodą Eulera (prostokątów)

$$U_n = k_p \left[ e_n + \frac{\Delta t}{T_i} \sum_{j=1}^n e_j + T_d \frac{(e_n - e_{n-1})}{\Delta t} \right] , \quad (19)$$

- całkowanie metodą trapezów

Sygnał wyjściowy regulatora

$$U(t) = U_p(t) + U_I(t) + U_D(t), \quad (12)$$

uchybu regulacji:

$$e(t) = \sin t, \quad (13)$$

składowa proporcjonalna:

$$U_p(t) = e(t) = \sin t, \quad (14)$$

składowa całkowa:

korzystając ze wzoru Newtona-Leibnitza

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (15)$$

gdzie  $F(x)+C$  – jest funkcją pierwotną dla  $f(x)$

( $f(x)$  jest pochodną funkcji  $F(x) + C$ )

$$U_I(t) = \int_0^t \sin t dt = [-\cos t + C]_0^t = -\cos t - (-\cos 0) = -\cos t + 1, \quad (16)$$

zaś składowa różniczkowa

$$U_D(t) = \frac{de(t)}{dt} = \cos t. \quad (17)$$

$$U_n = k_p \left[ e_n + \frac{\Delta t}{T_i} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(e_j + e_{j+1})}{2} + T_d \frac{(e_n - e_{n-1})}{\Delta t} \right]. \quad (20)$$

Algorytm przyrostowy:

- całkowanie metodą Eulera (prostokątów)

$$U_n - U_{n-1} = k_p \left[ (e_n - e_{n-1}) + \frac{\Delta t}{T_i} e_n + T_d \frac{(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2})}{\Delta t} \right], \quad (21)$$

- całkowanie metodą trapezów

$$U_n - U_{n-1} = k_p \left[ (e_n - e_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2T_i} (e_n + e_{n-1}) + T_d \frac{(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2})}{\Delta t} \right], \quad (22)$$

Sygnal wyjściowy regulatora PID - IND

$$U(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (23)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = k_p \frac{de(t)}{dt} + k_i \frac{d}{dt} \left( \int e(t) dt \right) + k_d \frac{d^2 e(t)}{dt^2} \quad (24)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = k_p \frac{de(t)}{dt} + k_i e(t) + k_d \frac{d}{dt} \left( \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (25)$$

Równanie to pozwala zbudować algorytm przyrostowy:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = k_p \frac{\Delta e}{\Delta t} + k_i e + k_d \frac{\Delta}{\Delta t} \left( \frac{\Delta e}{\Delta t} \right) \quad (26)$$

$\Delta t$  – krok dyskretyzacji czyli czas cyklu obliczeniowego, więc:

$$\Delta U = k_p \Delta e + k_i e \Delta t + k_d \Delta \left( \frac{\Delta e}{\Delta t} \right) \quad (27)$$

Przyrost  $\Delta U$  jest różnicą między bieżącą wartością a wartością wyjścia w poprzednim cyklu:

$$\Delta U = U_n - U_{n-1} \quad (28)$$

dla odchyłki :

$$\Delta e = e_n - e_{n-1} \quad (29)$$

Ostatecznie wzór na bieżącą wartość sygnału wyjściowego:

$$U_n = U_{n-1} + k_p (e_n - e_{n-1}) + k_i e_n \Delta t + \frac{k_d}{\Delta t} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \quad (30)$$

Pojedynczy klasyczny regulator PID jest w wielu aplikacjach wystarczający do osiągnięcia celu regulacji. Jest także wykorzystywany do realizacji zaawansowanych algorytmów sterowania: w układach kaskadowych, selekcyjnych, z predyktorem Smitha, układach nadążających za modelem MFC (Model – Following Controller), układach sterowania predykcyjnego MPC (Model Predictive Control)