## 7.7 Schematy układów liniowych

### 7.7.1 Modele układów liniowych (jedno- i wielowymiarowe)

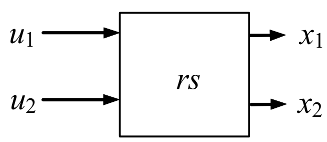
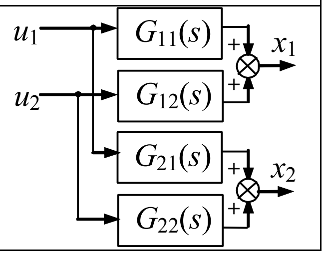
Metoda konstrukcji schematu modelu na bazie bloków całkujących przedstawiona powyżej (p.7.3), jest dość ogólna – umożliwia badanie zarówno równań różniczkowych liniowych jak i nieliniowych. W przypadku równań liniowych (zlinearyzowanych) istnieją alternatywne sposoby definiowania modeli oparte na macierzowym zapisie równań stanu oraz na transmitancjach [1][7].

Załóżmy, że przedmiotem badań jest równanie $\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$, czyli model, który był już zdefiniowany wcześniej za pomocą bloków całkujących (7.6).

| Model i konwersja na: | równania stanu | transmitancję |
|---|---|---|
| $\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$<br>war.począt.: $\dot{x}(0)=0$, $\ddot{x}(0)=0$<br>tzn. stan równowagi:<br>$x(0)=u(0)/c$ | $x=x_1 \quad \leftarrow x$<br>$\dot{x}_1=x_2 \quad \leftarrow \dot{x}$<br>$\dot{x}_2 \quad \leftarrow \ddot{x}$<br>$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -c & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$<br>$\dot{\mathbf{X}}(t)= \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{X}(t)+\ \mathbf{B} \quad \mathbf{U}(t)$ | Zakładając $\dot{x}(0)=0$ i $\ddot{x}(0)=0$ po zastosowaniu transformaty Laplace'a mamy:<br>$s^2x(s)+sbx(s)+cx(s)=u(s)$<br>$x(s)=\dfrac{1}{s^2+bs+c}u(s)$ |
| Parametry bloków: | $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -c & -b\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$<br>stan równowagi $\mathbf{X}(0)=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(0)$ | licznik = 1 → wektor współczynników = [1]<br>mianownik $=s^2+bs+c$ → wektor współczynników = [1 b c]<br>zawsze zerowe warunki początkowe $u(0)=0$, $x(0)=0$ |

Jeden ze sposób realizacji zadania polega na utworzeniu schematu z wykorzystaniem bloków dedykowanych do równań stanu i transmitancji.

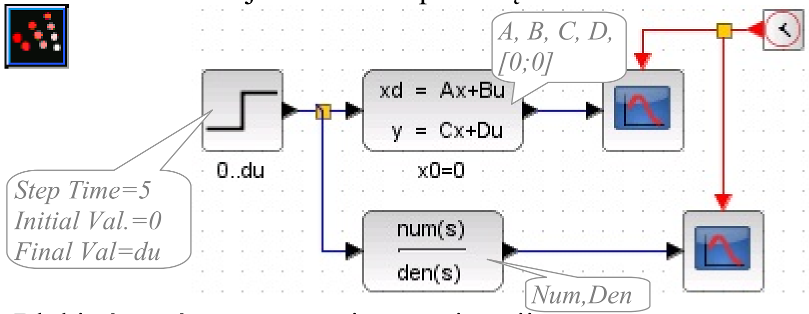
Analizowany model ma jedno wejście i jedno wyjście (model SISO), co jest typowe w przypadku transmitancji. W równaniach stanu tego modelu występuje jedna zmienna wejściowa i dwuelementowy wektor zmiennych wyjściowych, zawierający właściwą zmienną wyjściową i jej pochodną. Równania stanu są typową formą do badania obiektów o wielu wejściach i wielu wyjściach (MIMO), natomiast zastosowanie transmitancji w takich przypadkach wymaga zdefiniowania kilku wyrażeń, na przykład dla układu o dwóch wejściach i dwóch wyjściach:

| równania stanu | transmitancje[1] |
|---|---|
| $\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$   | $x_1(s)=G_{11}(s)u_1(s)+G_{12}(s)u_2(s)$<br>$x_2(s)=G_{21}(s)u_1(s)+G_{22}(s)u_2(s)$   |

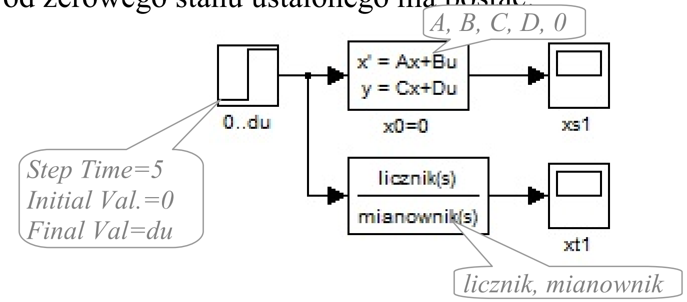
[1] Uwaga: Często nie ma potrzeby stosowania schematu blokowego transmitancji ponieważ badania ograniczają się wyznaczania reakcji na zmiany poszczególnych wejść.

### 7.7.2 Symulacja od zerowych warunków początkowych

W pierwszym podejściu przygotowane zostaną schematy i skrypty do wyznaczenia odpowiedzi skokowej układu $\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$, czyli reakcji układu na skok od wartości 0 do wartości $du$=1 (np. w chwili 5), przy zerowych warunkach początkowych (stan równowagi dla $u(0)=0$).
Graficzna realizacja modelu za pomocą równań stanu i transmitancji do symulacji od zerowego stanu ustalonego ma postać:




Bloki równań stanu CLSS i transmitancji CLR
Uwaga: Należy podać warunki początkowe dla wszystkich zmiennych stanu
Format dość dowolny: [0;0] lub [0,0] lub 0,0.




Bloki równań stanu State-Space i transmitancji Transfer Fcn

Parametry bloków zostały zdefiniowane za pomocą zmiennych wygenerowanych za pomocą skryptu:

```
b = 8; c = 2;            //parametry układu
du=1;                    //wartość skoku na wejściu

//definicja macierzy
A=[0, 1; -c, -b];  B=[0; 1];  C=[1, 0; 0, 1];  D=[0; 0];

//definicja transmitancji
s = poly(0,'s');         //def.zmiennej wielomianu
Num = 1;                 //wielomian licznika
Den = s^2+b*s+c;         //wielomian mianownika
```

```
b = 8; c = 2;
du=1;          %wartość skoku na wejściu

%definicja macierzy
A=[0, 1; -c, -b]; B=[0; 1]; C=[1, 0; 0, 1]; D=[0; 0];

%definicja transmitancji
licznik = 1;             %współczynniki wielomianu licznika
mianownik= [1 b c];      %współczynniki wielomianu mianownika
```

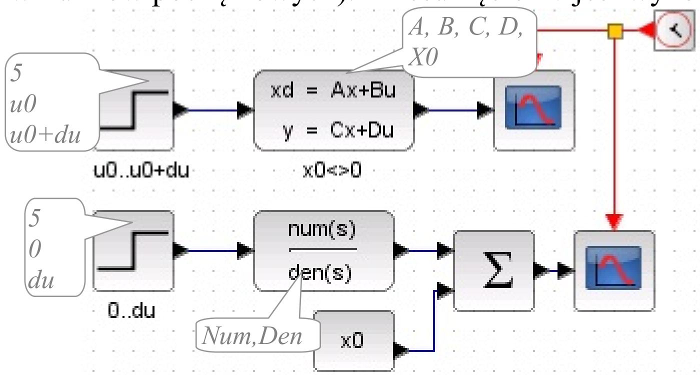
W blokach równań stanu wykorzystano zmienne macierzowe definiujące równania stanu $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}$ oraz równania wyjściowe $\mathbf{y}=\mathbf{Cx}+\mathbf{Du}$, ponieważ równania wyjściowe są jedynym sposobem przekazania wyników symulacji na zewnątrz tego bloku. W bloku równań stanu podawany jest również zestaw warunków początkowych w postaci wektora wartości zmiennych stanu w chwili 0 – w tym wypadku są to warunki zerowe.

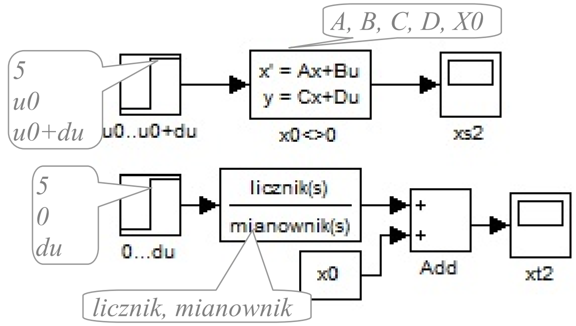
Ten sam model definiowany w bloku transmitancji wykorzystuje zmienne zawierające wielomiany licznika i mianownika. Uzyskane wyniki symulacji (wyświetlane na wykresach) nie zależą od sposobu zdefiniowania modelu, z tym, że na wyjściu bloku równań stanu dostępny wektor sygnałów, który odpowiada zmiennej $x$ i jej pochodnej.

### 7.7.3 Symulacja od dowolnego stanu równowagi

Kolejne podejście do badania układów liniowych jest bardziej uniwersalne ponieważ przedstawia sposób badania reakcji układu $\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=u(t)$ na dowolny skok od dowolnego stanu równowagi, to znaczy dowolna zmiana (*du*) od dowolnego stanu równowagi zależnego od początkowej wartości wymuszenia (*u0*).

Graficzna realizacja modelu do symulacji od dowolnego stanu ustalonego w przypadku równań stanu nie zmieni się, ponieważ na wejście bloku zawierającego równania stanu można podać zakłócenie skokowe od dowolnej wartości początkowej, a w parametrach bloku ustawić wektor odpowiednich wartości początkowych, obliczony na przykład w skrypcie z wykorzystaniem operacji macierzowych (zmienna X0). Uzyskanie tego samego wyniku w bloku transmitancji można zrealizować przez złożenie dwóch sygnałów: reakcji transmitancji na wymuszenie skokowe (*du*) od wartości 0 oraz wartości początkowej odpowiadającej stanowi równowagi (zmienna *x0*). W badaniach dynamiki modelu opisanego transmitancją zazwyczaj nie stosuje się tego przesunięcia (wiadomo, że własności układu liniowego nie zależą od punktu pracy więc można badać układ od zerowych warunków początkowych). Przesunięcie x0 jest wykorzystywane w symulacjach do przedstawienia wartości w odpowiedniej skali fizycznej.




Parametry powyższych bloków zostały zdefiniowane za pomocą zmiennych wygenerowanych za pomocą skryptu:

```
b = 8; c = 2;
u0=2; du=1;                //wartość początkowa i skok na wejściu

//definicja macierzy
A=[0, 1; -c, -b]; B=[0; 1]; C=[1, 0; 0, 1]; D=[0; 0];
U0=[u0];                   //dowolna wartość początkowa
X0=-inv(A)*B*U0;           //wektor war.początkowych dla U0

//definicja transmitancji
s=poly(0,'s');             //def.zmiennej wielomianu
Num=1;                     //wielomian licznika
Den=a*s^2+b*s+c;           //wielomian manownika
x0=u0/c;                   //stan początkowy dla u0
```

```
b = 8; c = 2;
u0=2; du=1;                %wartość początkowa i skok na wejściu

%definicja macierzy
A=[0, 1; -c, -b]; B=[0; 1]; C=[1, 0; 0, 1]; D=[0; 0];
U0=[u0];                   %dowolna wartość początkowa
X0=-inv(A)*B*U0;           %wektor war.początkowych dla U0

%definicja transmitancji
licznik = 1;               %współczynniki wielomianu licznika
mianownik= [1 b c];        %współczynniki wielomianu mianownika
x0=u0/c;                   %stan początkowy dla u0
```

Uwaga: Bloki transmitancji z warunkami początkowymi, które pojawiają się w nowszych wersjach programów, realizują to zadanie przez konwersję transmitancji do równań stanu.